Αλγεβρικές

$\varphi : O \to G$ ομομορφισμός ομάδων

$\varphi(a \,\square_O\, b) = \varphi(a) \,\square_G\, \varphi(b) \quad \forall a, b \in O$

$O \simeq G$ $\underline{\underline{\text{αν}}}$ $\varphi : O \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} G$

Ιδιότητες

1) $\varphi(1_O) \longrightarrow 1_G$

$\varphi(1_O \cdot 1_O) = \varphi(1_O) \Rightarrow \varphi(1_O) \cdot \varphi(1_O) = \varphi(1_O) \Rightarrow$

$\varphi(1_O) \cdot \varphi(1_O) \cdot \varphi(1_O)^{-1} = \varphi(1_O) \cdot \varphi(1_O)^{-1} \Rightarrow \varphi(1_O) = 1_O$

2) $\varphi(a^k) = (\varphi(a))^k \quad k \in \mathbb{Z}$

$\varphi(a^k) = \varphi(a \cdot a \cdot \ \ a) = \ \ = \varphi(a)^k$

3) $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

$\varphi(a^{-1}) = \varphi(1) = 1_G \Rightarrow \varphi(a)\varphi(a^{-1}) = 1_G \Rightarrow$

$(\varphi(a))^{-1}\varphi(a)\,\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1} \cdot 1_G \Rightarrow \varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

4) Αν $o(a) = n \Rightarrow o(\varphi(a)) / n$

$a^n = 1_O \Rightarrow \varphi(a^n) = \varphi(1_O) = 1_G \Rightarrow \varphi(a)^n = 1_G \Rightarrow o(\varphi(a)) / n$

Παράδειγμα

1. $\varphi : O \to G \xrightarrow{\text{τετριμμένος}} \varphi(a) = 1_G$

$\varphi(ab) = 1_G \Rightarrow \varphi(a) \cdot \varphi(b) = 1_G \cdot 1_G = 1_G$ ισχύει

2. $\varphi : O \to O \quad \varphi$: ταυτοτική

3) $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$\varphi(1) = 1$ ομομορφισμός

$\varphi(1) = -1 \Rightarrow \varphi(2) = \varphi(1) + \varphi(1) = -1 - 1 = -2$

$\varphi(-1) = -\varphi(1) = -(-1) = 1$ 3) Ιδιότητα

Αλλά: $\varphi(1) = k \Rightarrow \varphi(m) = \varphi(\underbrace{1+1+\dots+1}_{m}) = m\varphi(1) = mk$

$\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ (i) είναι 1-1?

$\varphi(1) = k$ αν $k = 0 \Rightarrow \varphi$ όχι 1-1

Αν $k \neq 0 \Rightarrow \varphi$ 1-1

(ii) είναι επί?

$\varphi(1) = k$

επί $\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{Z}\ \exists \lambda \in \mathbb{Z}$ με $\varphi(\lambda) = m$

$\Rightarrow \lambda k = m$

Η φ είναι επί όταν $k = \pm 1$

4) $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4$ ορίζονται?

(όχι ισομορφισμός αφού $\mathbb{Z}$ άπειρη ενώ $\mathbb{Z}_4$ όχι)

$\varphi(1) = 0$

Αλλά: $\varphi(1) = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$

$\varphi(1) = 2 \Rightarrow \varphi(2) = \varphi(1+1) = 2 + 2 \equiv 0$ όχι επί

$\left.\begin{array}{l} \varphi(1) = 3 \bmod 4 \Rightarrow \varphi(2) = 2 \cdot 3 = 2 \bmod 4 \\ \varphi(3) = \varphi(1+1+1) = 3\varphi(1) = 3 \cdot 3 \equiv 1 \bmod 4 \end{array}\right\}$ επί

Είναι 1-1? $\varphi(4) = 4 \cdot \varphi(1) = 4 \cdot 3 = 12 \equiv 0 \bmod 4$

5) $\varphi: \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}$

$\varphi(1) = 0$ τετριμμένη

Αν $\varphi(1) = k \neq 0$

$\varphi(2) = 2k$

$\varphi(3) = 3k$

$\varphi(0) = \varphi(4) = 4k = 0$

$$\left.\begin{array}{l} o([1]_4) = 4 \\ o(k) = \infty \end{array}\right\} \xrightarrow{4) \text{ ιδιότητα}} o(\varphi(1)) = \infty / 4 = o(1)$$ Αδύνατο

Άρα δεν υπάρχει $\varphi(1) = k \neq 0$

6) Υπάρχουν μη-τετριμμένες $\varphi: \mathbb{Z}_k \to \mathbb{Z}_m$

$\varphi([1]_k) \neq [0]_m$

$\varphi([1]_k) = [a]_m \Rightarrow o([a]_m) \mid o([1]_k) = k$

$$o([a]_m) = \frac{o([1]_m)}{(o[1]_m, a)} = \frac{m}{(m,a)}$$

Αν ο φυσικός αριθμός $\frac{m}{(m,a)} \mid k \Rightarrow \exists \varphi$

π.χ. • $\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4$ εκτός της ταυτοτικής

$\frac{4}{(4,a)} \mid 4$ $\quad a=1$, $a=2$

• $\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_5$ Υπάρχει εκτός της τετριμμένης ?

$\frac{5}{(5,a)} \mid 4$

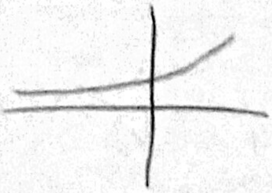
$a=5 \Rightarrow \dfrac{5}{(5,5)} = 1 \mid 4$

$\varphi[1]_4 = [5]_5 = [0]$

7) Υπάρχει $\cong$ (ισομορφισμός) $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$(\mathbb{R},+) \longrightarrow (\mathbb{R}^+,\cdot)$

$\varphi(x) = e^x$



Υπάρχει $\cong$ $\varphi: (\mathbb{Q},+) \to (\mathbb{Q}^+,\cdot)$

Έστω υπάρχει $\varphi(r) = a$

$\exists\, r'$ με $\varphi(r') = 3$ επί

$r' \in \mathbb{Q} \Rightarrow \dfrac{r'}{2} + \dfrac{r'}{2} = r' \Rightarrow \varphi\left(\dfrac{r'}{2} + \dfrac{r'}{2}\right) = \varphi(r') = 3 \Rightarrow$

$\varphi\left(\dfrac{r'}{2}\right)\varphi\left(\dfrac{r'}{2}\right) = 3 \Rightarrow \left(\varphi\dfrac{r'}{2}\right)^2 = 3$!!!

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν $\varphi: O \to G$ ισομορφισμός ομάδων, τότε

i) $o(\varphi(a)) = o(a)$

ii) $|G| = |O|$

iii) O αβελιανή ανν G αβελιανή

Απόδειξη

i) $\exists \varphi^{-1} : G \xrightarrow{\cong} O \Rightarrow o(a) / o(\varphi(a))$

ΘΕΩΡΗΜΑ Cayley

Κάθε πεπερασμένη ομάδα είναι ισόμορφη με κάποια υποομάδα κάποιας συμμετρικής ομάδας (χωρίς απόδειξη)

O ομάδα $|O| = n$ Σ_n συμμετρική

Τότε υπάρχει μονομορφισμός $\varphi : O \xrightarrow{1-1} \Sigma_n$

Ιδιότητες

Έστω $\varphi : O \to G$ ομομορφισμός ομάδων

1) Αν $Y \leq O \Rightarrow \varphi(Y) \leq G$

2) Αν $H \leq G \Rightarrow \varphi^{-1}(H) \leq O$

3) Αν $H \trianglelefteq G \Rightarrow \varphi^{-1}(H) \trianglelefteq O$

4) Αν φ επί και $Y \trianglelefteq O \Rightarrow \varphi(Y) \trianglelefteq G$

Απόδειξη

3. Αν $H \trianglelefteq G \Rightarrow \varphi^{-1}(H) \trianglelefteq O$

$\varphi^{-1}(H) \leq O$ γιατί??

$a, b \in \varphi^{-1}(H) \to ab \in \varphi^{-1}(H)$

$a, b \in \varphi^{-1}(H) \Rightarrow \varphi(a), \varphi(b) \in H \leq G \Rightarrow \varphi(a)\varphi(b) \in H$

$\varphi(ab) \in H \Rightarrow ab \in \varphi^{-1}(H)$

Αν $a \in \varphi^{-1}(H) \Rightarrow \varphi(a) \in H \Rightarrow \varphi(a^{-1}) \in H \Rightarrow a^{-1} \in \varphi^{-1}(H) \Rightarrow \varphi^{-1}(H) \leq O$

Κανονική όταν $H \triangleleft O$

$\forall a \in O,\ \forall b \in \varphi^{-1}(H) \rightarrow \varphi(b) \in H$ ⊕

Πρέπει $aba^{-1} \in \varphi^{-1}(H) \Longleftrightarrow \varphi(a)\varphi(b)\varphi(a^{-1}) \in H$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(a)\varphi(b)(\varphi(a))^{-1} \\ \varphi(b) \in H \triangleleft G \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(a)\varphi(b)\varphi(a^{-1}) \in H$$

$\boxed{\text{Άσκηση για το επί το 4)}}$

Παράδειγμα

$\varphi : \mathbb{Z}_{16} \rightarrow \mathbb{Z}_4$

$[1] \longmapsto [1]_4 = \varphi([1]_{16})$

Θα πρέπει $o(\varphi([1]_{16})) \mid o([1]_{16}) = 16$

$\varphi([1]_{16}) = [1]_4$

$\mathbb{Z}_{16}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	↓	↓	↓	↓	↓											
$\mathbb{Z}_4$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3

$\varphi^{-1}\{[0]_4\} \leq \mathbb{Z}_{16}$ $\qquad$ $\varphi^{-1}\{[0]_4\} = \{[0]_{16}, [4]_{16}, [8]_{16}, [12]_{16}\}$

$<[0]_4> \leq \mathbb{Z}_4$ $\qquad$ $\varphi^{-1}\{[0]_4\} = <[4]_{16}>$

$\parallel$

<u>πυρήνας</u> της $\varphi = \ker\varphi$

φ επι $\qquad$ $\mathbb{Z}_{16}/\ker\varphi = \mathbb{Z}_{16}/<[4]_{16}>$

$$\bar{\varphi} : \mathbb{Z}_{16}/\ker\varphi \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z}_4$$

$$\mathbb{Z}_{16}/\ker\varphi = \{\underset{\Downarrow\,[0]}{[0]+\ker\varphi},\ \underset{\Downarrow\,[1]}{[1]+\ker\varphi},\ \underset{\Downarrow\,[2]}{[2]+\ker\varphi},\ \underset{\Downarrow\,[3]}{[3]+\ker\varphi}\}$$

$[2]+\ker \oplus [3]+\ker\varphi = ([2]+[3]) + \ker\varphi = [5]+\ker\varphi =$

$= [1]+[4]+\ker\varphi = [1]+\ker\varphi$

$\bar{\varphi}([a]+\ker\varphi) = \varphi[a]$